Notes de cours

Fonction Racine Carrée

par Francis Lau de Tutorat A+ Tutoring
www.goforaplus.com

Tutorat A+ Tutoring

La Fonction Racine Carrée

par Francis Lau de
Tutorat A+ Tutoring

Ce livre électronique est dédié à tous mes étudiant(e)s. Votre succès est ce qui m'inspire à travailler fort pour continuer à vous offrir plus de contenu de qualité.

Table des matières

1. Rationalisation

Lois des Racines

1. $\sqrt[n]{a} = b \overset{inverse}{\Longleftrightarrow} b^{\mathrm{n}} = a$
2. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\mathrm{m}/n}$
4. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
5. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Réduction du Radicande

N.B.: Il faut utiliser des facteurs de carré

$4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225, \ldots.$

Ex 1a:

Question:	Réduit $\sqrt{500}$	
Réponse:	$\sqrt{100 \times 5}$	Trouve un facteur de carré.
	$= \sqrt{100} \times \sqrt{5}$	On peut les séparer parce que c'est une multiplication.
	$= 10\sqrt{5}$	On simplifie.

Ex 1b:

Question:	Réduit $\sqrt{98}$	
Réponse:	$\sqrt{49 \times 2}$	Trouve un facteur de carré.
	$= \sqrt{49} \times \sqrt{2}$	On peut les séparer parce que c'est une multiplication.
	$= 7\sqrt{2}$	On simplifie.

Ex 1c:

Question:	Réduit $5\sqrt{8} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{75} - 3\sqrt{18}$	
Réponse:	$5\sqrt{4 \times 2} - 2\sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 2}$	Trouve un facteur de carré.
	$= 5\sqrt{4}\sqrt{2} - 2\sqrt{9}\sqrt{3} + 2\sqrt{25}\sqrt{3} - 3\sqrt{9}\sqrt{2}$	On peut les séparer parce que c'est une multiplication.
	$= 10\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 9\sqrt{2}$	On simplifie.
	$= \sqrt{2} + 4\sqrt{3}$	On simplifie.

Rationalisation du Dénominateur

Ex 1d:

Question:	Rationalise le dénominateur de $\frac{3}{\sqrt{5}}$	
Réponse:	$\frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$	Multiplier la valeur de dénominateur au numérateur et au dénominateur.
	$= \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}\sqrt{5} = \sqrt{5}^2 = 5$
	$= \frac{3\sqrt{5}}{5}$	On simplifie.

Ex 1e:

Question:	Rationalise le dénominateur de $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	
Réponse:	$\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	Multiplier la valeur de dénominateur au numérateur et au dénominateur.
	$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 = 3$
	$= \frac{\sqrt{3} - 3}{3}$	On simplifie.

Ex 1f:

Question: Rationalise le dénominateur de $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

Réponse:

$$\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \times \frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

Multiplier la conjuguée de dénominateur au numérateur et au dénominateur.

Au dénominateur, c'est une différence au carré.

$$(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})(5\sqrt{2}+2\sqrt{3})$$

$$= 25\sqrt{2}\sqrt{2} + 10\sqrt{2}\sqrt{3} - 10\sqrt{2}\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\sqrt{3}$$

$$= 50 - 12 = 38$$

$$= \frac{5\sqrt{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{3}}{(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})(5\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{5 \times 2 + 2\sqrt{2 \times 3}}{38}$$

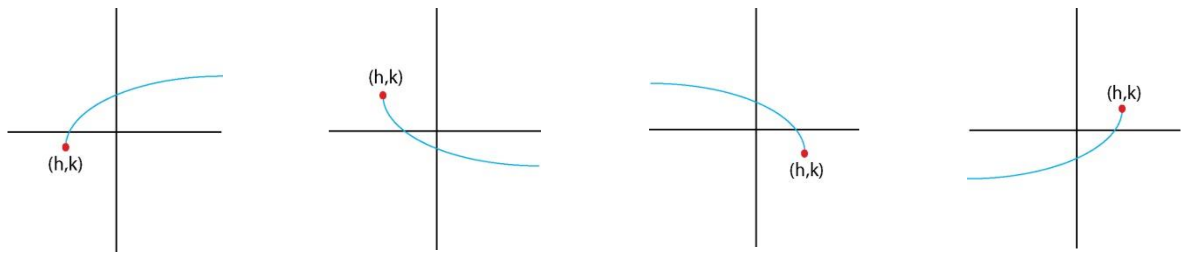
$$= \frac{10 + 2\sqrt{6}}{38}$$

On simplifie.

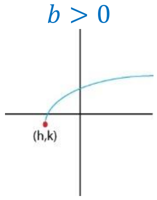
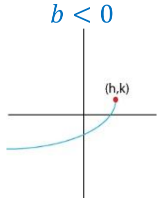
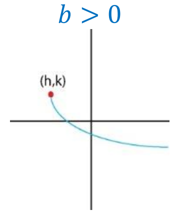
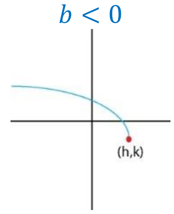
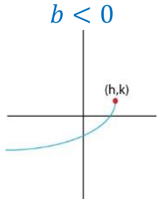
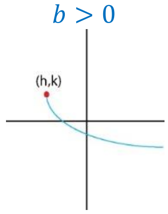
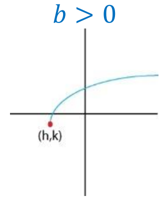
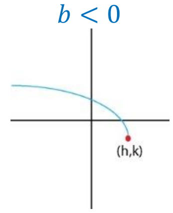
2. La Fonction Racine Carré

$$\boxed{f(x) = a\sqrt{b(x-h)} + k}$$

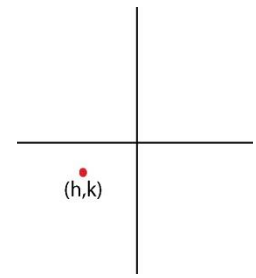
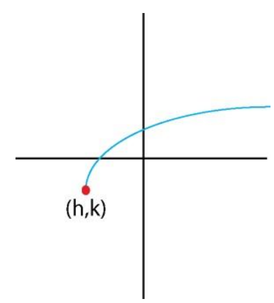
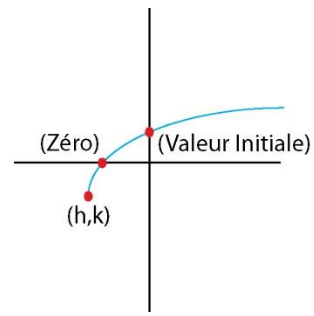
$a > 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b > 0$	$a > 0$ $b < 0$	$a < 0$ $b < 0$



- ✓ (h, k) représente le point de départ pour la fonction racine carrée.
- ✓ La fonction racine carrée est la fonction inverse de la fonction quadratique (parabole).

Propriété	Réponse		Valeur de
Sommet	(h, k)		$\emptyset$
Domaine	$b > 0$ $[h, \infty[$	$b < 0$ $]-\infty, h]$	x
Image (Codomaine)	$a > 0$ $[k, \infty[$	$a < 0$ $]-\infty, k]$	y
Zéro (Abscisse à l'origine)	Zéro existe seulement si a et k ont des signes contraires ou $k = 0$. Mettre $y = 0$ Trouve $x = ?$		x
Valeur Initiale (Ordonnée à l'origine)	Valeur initiale existe seulement si b et h ont des signes contraires ou $h = 0$. Mettre $x = 0$ Trouve $y = ?$		y
Taux de Variation (Se fie toujours au esquisse, c'est plus facile)	Croissante : $a > 0$ $b > 0$  $[h, \infty[$ $a < 0$ $b < 0$  $]-\infty, h]$	Décroissante : $a < 0$ $b > 0$  $[h, \infty[$ $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ $b < 0$  $]-\infty, h]$	x
Signe (Positif et Négatif)	(Se fie toujours au esquisse, c'est plus facile)		x
Extremum	$a < 0$ $b < 0$  $a < 0$ $b > 0$  Max : k Min : $\emptyset$	$a > 0$ $b > 0$  $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ $b < 0$  Max : $\emptyset$ Min : k	y

3. Faire Esquisse

1	**Identifie les variables à partir de la règle, (a, b, h, k)**	
2	**Trouver (h, k) et le mettre sur le graphique.**	
3	**Identifie si a est positive ou négative** **Identifie si b est positive ou négative**	
4	**Trace le graphique en basant sur les 4 graphiques dans la section 2 de ce document.**	
5	**Parfois, les professeurs demandent de mettre les zéros et la valeur initiale sur l'esquisse.**	

Ex 3a:

Question: Faire l'étude de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4x+8} - 3$

Réponse:

$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4(x+2)} - 3$

Mettre sous forme $f(x) = a\sqrt{b(x-h)} + k$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad h = -2$

$b = 4$ $\quad k = -3$

Identifie les variables a, b, c, h, k

Dom : $[-2, \infty[$

Image : $[-3, \infty[$

$b > 0$

$a > 0$

$0 = \frac{1}{2}\sqrt{4(x+2)} - 3$

Trouver le zéro

$6 = \sqrt{4(x+2)}$

$36 = 4(x+2)$

Pour enlever la racine carrée, on élève au carrée dans les 2 côtés de l'équation.

$9 = x + 2$

$x = 7$

La réponse peut être validée en regardant si elle est dans le domaine.

Zéro : $\{7\}$

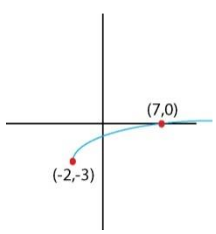
$f(0) = \frac{1}{2}\sqrt{4(0+2)} - 3$

Trouver la valeur initiale

$f(0) = \frac{1}{2}\sqrt{8} - 3$

$f(0) = \sqrt{2} - 3$

Valeur initiale : $\sqrt{2} - 3$



Esquisse de la fonction.

Croissant : $[-2, \infty[$

Décroissant : $\emptyset$

Taux de variation.

$f(x) \geq 0 \; \forall \; x \in \; [7, \infty[$

$f(x) \leq 0 \; \forall \; x \in [-2,7]$

Signe : positif et négatif

Max : $\emptyset$

Min : -3

4. Cherche les Restrictions

$$\boxed{f(x) = a\sqrt{b(x-h)} + k}$$

Restrictions (en effet c'est le domaine de la fonction):
$b(x-h) \geq 0$

Ex 4a:

Question: Cherche les restrictions de cette fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4x+8} - 3$$

Réponse:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4x+8} - 3$$

Restrictions : — Cherche les restrictions

$4x + 8 \geq 0$

$4x \geq -8$

$x \geq -2$ — La restriction est aussi le domaine.

5. Résoudre l'Équation

Ex 5a:

Question:	Résous $\frac{1}{2}\sqrt{4x+8}-1=2$	
Réponse:	$\frac{1}{2}\sqrt{4x+8}-1=2$	
	Restrictions :	
	$4x+8\geq 0$ $4x\geq -8$ $x\geq -2$	Cherche les restrictions (c'est aussi le domaine)
	$\frac{1}{2}\sqrt{4(x+2)}=3$	Isoler le x
	$\sqrt{4(x+2)}=6$	On isole jusqu'à la racine carrée. On voit que la racine carrée égale à un nombre positif, donc on peut continuer à chercher la variable x.
	$4(x+2)=36$	Pour enlever la racine carrée, on élève au carrée dans les 2 côtés de l'équation.
	$x+2=9$	
	$x=7$	La réponse est dans le domaine.

Ex 5b:

Question:	Résous $2\sqrt{x-5}-1=-5$	
Réponse:	$2\sqrt{x-5}-1=-5$	
	Restrictions :	
	$x-5\geq 0$ $x\geq 5$	Cherche les restrictions (c'est aussi le domaine)
	$2\sqrt{x-5}=-4$	Isoler le x
	$\sqrt{x-5}=-2$	On isole jusqu'à la racine carrée. On voit que la racine carrée égale à un nombre négatif, donc on ne peut pas continuer à chercher la variable x. La racine carrée donne toujours un nombre positif.
	$S=\{\emptyset\}$	

6. Résoudre l'Inéquation

Ex 6a:

Question: Résous $-2\sqrt{x+3}+1 \geq -1$

Réponse:

$-2\sqrt{x+3}+2 \geq 0$

Mettre un côté de l'équation à 0.

À ce point, c'est comme si qu'on cherche le signe positif de cette fonction $-2\sqrt{x+3}+2$

$-2\sqrt{x+3}+2 = 0$

On résout avec une égale dans l'équation.

Restrictions :

$x+3 \geq 0$

$x \geq -3$

Cherche les restrictions (c'est aussi le domaine)

$-2\sqrt{x+3} = -2$

Isoler jusqu'à la racine carrée.

$\sqrt{x+3} = 1$

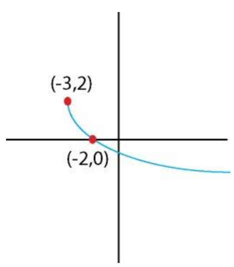
On voit que la racine carrée égale à un nombre positif, donc on peut continuer à chercher la variable x.

$x+3 = 1$

Pour enlever la racine carrée, on élève au carrée dans les 2 côtés de l'équation.

$x = -2$

C'est le zéro.



Faire l'esquisse de la fonction $-2\sqrt{x+3}+2$

$x \in [-3,-2]$

On inclut les zéros à cause que la question est $\geq$, donc c'est positive.

7. Recherche la Règle

$$\boxed{f(x) = a\sqrt{+(x-h)} + k}$$

Ou

$$\boxed{f(x) = a\sqrt{-(x-h)} + k}$$

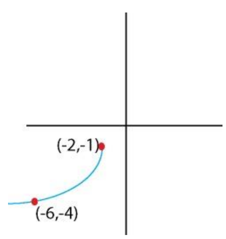
N.B. : La valeur de la variable b est intégrés dans la variable a mais le signe de la variable b a besoin être déterminé.

Sommet et un Point Quelconque

Ex 7a:

Question: Sommet $(-2,-1)$ et un point $(-6,-4)$. Trouver la règle de la fonction racine carrée.

Réponse: $(h,k) = (-2,-1)$



Faire l'esquisse de la fonction avec les 2 points.

$f(x) = a\sqrt{-(x-h)} + k$ — On voit bien que le signe de $a\ et\ b$ sont négatifs. Donc on utilise la règle avec $b=-1$

$f(x) = a\sqrt{-(x+2)} - 1$ — Remplacer (h,k)

$-4 = a\sqrt{-(-6+2)} - 1$ — Remplacer $(-6,-4)$ et chercher la variable a

$-3 = a\sqrt{4}$

$-3 = 2a$

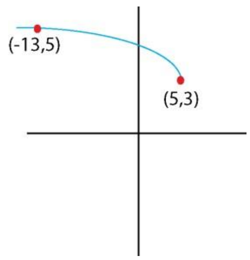
$a = -\frac{3}{2}$

$f(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{-(x+2)} - 1$ — Écrire la règle en remplaçant les variables.

Ex 7b:

Question: Sommet $(5,3)$ et un point $(-13,5)$. Trouver la règle de la fonction racine carrée.

Réponse: $(h,k) = (5,3)$



Faire l'esquisse de la fonction avec les 2 points.

$f(x) = a\sqrt{-(x-h)} + k$

On voit bien que le signe de a est positif et le signe de b est négatifs. Donc on utilise la règle avec $b = -1$

$f(x) = a\sqrt{-(x-5)} + 3$

Remplacer (h,k)

$5 = a\sqrt{-(-13-5)} + 3$

Remplacer $(-13,5)$ et chercher la variable a

$2 = a\sqrt{18}$

$2 = 3a\sqrt{2}$

$a = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Il faut rationaliser le dénominateur.

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{-(x-5)} + 3$

Écrire la règle en remplaçant les variables.

$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{-2(x-5)} + 3$

Si la variable a a une racine, on peut le déplacer dans la variable b.

8. Recherche la Règle de la Réciproque

1. Trouver l'image de la fonction racine carrée, cela est le domaine de la fonction réciproque.
2. Inter change x et y.
3. Isole le y.

Ex 8a:

Question: Trouve la réciproque de $f(x) = 4\sqrt{-(x+3)} - 2$

Réponse:

$y = 4\sqrt{-(x+3)} - 2$

Image : $[-2, \infty[$

Image de la fonction racine carrée, le domaine de la fonction réciproque.

$x = 4\sqrt{-(y+3)} - 2$

Inter change les variables $x \ et \ y$.

$\frac{1}{4}(x+2) = \sqrt{-(y+3)}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 (x+2)^2 = -(y+3)$

Pour enlever la racine carrée, on élève au carrée dans les 2 côtés de l'équation.

$\frac{1}{16}(x+2)^2 = -(y+3)$

$-\frac{1}{16}(x+2)^2 = y+3$

$-\frac{1}{16}(x+2)^2 - 3 = y$

$f(x) = -\frac{1}{16}(x+2)^2 - 3 \quad , \quad x \in [-2, \infty[$

C'est important de mettre le domaine, parce que la réciproque est moitié d'une parabole.